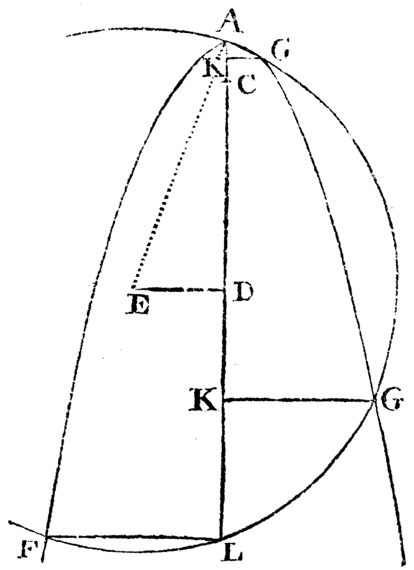
De Conſtructione Problematum Solidorum, ſive Æquationum tertiæ vel quartæ Poteſtatis, unica data Parabola ac Circulo efficienda; diſſertatiuncula: Authore *Edm. Halley*.

QUo pacto æquationes omnes Cubum vel Quadrato-quadratum quantitatis incognitæ involventes, ope Parabolæ cujuſcunq; datæ & Circuli, conſtrui poſſint, clare tradit ac Liquido demonſtrat præclarus ille Carteſius *in Lib. III. Geometriæ ſuæ: ſed primum jubet ſecundum æquationis terminum, ſi adſuerit, tollere, ac deinde reductæ æquationis Radices regula ibidem expoſita elicere. Cum vero operatio iſta nimis laborioſa videatur, nonnullis viſum eſt conſtructionem ſimilem etiam abſq; ulla prævia reductione comminiſci; inter quos* Franciſcus *a* Schooten *Methodum valde facilem ac ſimpliciſſimam pro conſtruendis Cubicis quomodolibet affectis prodidiſſet, ſi modo expoſito principio unde regulam derivavit, Lectoris memoriæ, quam plurimis ac intricatis cautionibus obruit, melius ſtuduiſſet. Nuper vero Vir Cl. D.* Thomas Baker *noſtras, integro libello de conſtructionibus hiſce conſcripto, non ſolum Cubicas ſed etiam Biquadraticas omnes cujuſcunq; generis unica generali regula complexus eſt, eamq; demonſtrationibus ac Exemplis per omnes caſus abunde ſatis illuſtravit; nec non ſub finem modum proponit unde regula iſta generalis inveſtigari poſſit: Haud tamen illum ipſum oſtendit, cujus ope (uti ſuſpicor) Clavem ſuam Geometricam Catholicam obtinuit, vel ſaltem multo facilius obtinere potuit. Cumq; perplexis cautionibus de ſignis + & — Regula hæc D.* Bakeri *non minus obnoxia ſit quam illa* Schooteni, *ut vix abſente libro conſtructiones illas quis tuto peragat; haud injucundum nec Tyronibus incommodum fore vi-*

tum est, utriusq; fundamentum exponere, ac simul emendata methodo, in re tam difficili, lucem quantum valeam afferre.

Constructio quam tradit Cartesius, *quæq; facillime radices æquationum omnium Cubicarum vel biquadraticarum, ubi deficit secundus terminus, eruit, ut nota supponi potest; attamen cum cardo sit a quo subsequentia pendent, ne dissertatiuncula hæc capite truncata videatur, ex illius Geometria desumptam placuit Regulam adjungere, pauculis nonnullis in melius uti reor transpositis.*

Deficiente secundo termino omnes æquationes Cubicæ reducuntur ad hanc formam z^3 .*. a p z. a a q. = o, *ac Biquadraticæ ad hanc* z^4.*. a p z z. a a q z. a^3 r = o. *(ubi* a *designat Latus rectum Parabolæ cujusvis datæ, quam in Constructione adhibere licet.) vel sumendo* a *pro Unitate, ad hanc* z^3 .*. p z. q = o, *vel ad hanc* z^4. * .p z z, q z. r = o.



Jam data Parabola F-A G *cujus Axis sit* A C-D K L *ac latus rectum* a *vel* 1, *fiat* A C *ejus dimidium ac collocetur semper a vertice* A *versus interiora figuræ: dein sumatur* C D = $\frac{1}{2}$ p *in linea illa* A C *continuata versus* C *si in æquatione fuerit* — p, *vel versus alteram partem si habeatur* + p. *Porro e puncto* D, *aut ex puncto* C *si non habeatur quantitas* p, *erigenda est ad axem perpendicularis* D-E *æqualis* $\frac{1}{2}$ q, *dextrorsum quidem si fuerit* — q, *ad alterum vero axis latus si fuerit* + q; *ac Circulus centro* E *radio* A E *descriptus, si æquatio fuerit tantum Cubica, Parabolam tot punctis* F & G *intersecabit quot veras habet Radices, quarum quidem affirmativæ ut* G K

erunt

erunt ad dextram Axis partem, Negativæ ut F L *ad ſiniſtram.*

Aſt ſi Æquatio Biquadratica fuerit, augeri vel minui debet Circuli Radius A E, *addendo ſi fuerit* $-r$, *vel ſubducendo, ſi ſit* $+r$, *ex ejus quadrato rectangulum* ar, *ſeu contentum ſub Latere recto & quantitate data* r; *id quod nullo fere negotio efficitur Geometrice. Hujus vero Circuli interſectiones cum Parabola omnes veras Biquadraticæ Æquationis radices dimiſſis ad Axem perpendiculis exhibebunt; Affirmativas quidem ad dextram Axis, Negativas vero ad ſiniſtram. Totius demonſtrationem* Carteſio *ejus inventori relinquo.*

Notandum hic me operam dare ut ſemper habeantur Radices affirmativæ ad dextrum Axis latus, ut evitetur confuſio a pluribus cautionibus, quarum cauſa minime evidens eſt, neceſſario oritura.

His præmiſſis, ut aditus pateat ad conſtructionem etiam earum æquationum ubi reperitur termiuus ſecundus, conſideranda venit regula pro tollendo termino ſecundo, ac reducenda æquatione ad aliam quæ methodo præcedente conſtrui poſſit. Omnes vero hujus claſſis æquationes cubicæ ad hanc formam $z^3 . bzz . apz . aaq = o$, *vel ad hanc* $z^3 . bzz . * . aaq = o$. *Biquadraticæ vero ad hanc* $z^4 . bz^3 . apzz . aaqz . a^3r = o$, *vel hanc* $z^4 . bz^3 . * . aaqz . a^3r = o$, *vel,* $z^4 . bz^3 . apzz . * . a^3r = o$ *vel deniq; ad hanc* $z^4 . bz^3 . * . * . a^3r = o$ *reduci poſſunt: e quibus omnibus, prout ſignis + & — diverſimode connectuntur, ingens oritur varietas; unde Regula generalis omnibus inſerviens obſcura ac maxime difficilis redditur, niſi methodo quam ſubjungimus illuſtrata nodiſq; extricata tractetur.*

Tollitur in Biquadraticis ſecundus terminus, ponendo $x = z + \frac{1}{4}b$, *ſi fuerit* $+b$ *in æquatione, vel* $x = z - \frac{1}{4}b$, *ſi fuerit* $-b$: *hinc* $x - \frac{1}{4}b$ *in prima caſu, &* $+\frac{1}{4}b$ *in altero æquatur* z; *& iu æquatione quavis propoſita, ſubſtituta loco* z *quantitate æquali, prodibit nova æquatio termino ſecundo carens, cujus radices omnes* x *data differentia* $\frac{1}{4}b$ *vel excedunt vel deficiunt a radice quæſita* z: *Cum vero in rebus iſtiusmodi plus exempla quam præcepta valere ſolent, proponatur una vel altera æquatio Conſtruenda.*

Exemp. I.

$z^4 + bz^3 - apzz - aaqz + aaar = o.$

Sit $x - \frac{1}{4}b = z$ *Et erit*

$xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = zz$

$xxx - \frac{3}{4}xxb + \frac{3}{16}xbb - \frac{1}{64}bbb = z^3$

& $x^4 - bx^3 + \frac{3}{8}bbxx - \frac{1}{16}b^3x + \frac{1}{256}b^4. = z^4.$

hinc.

$$\begin{array}{rrrrrl}
x^4 - bx^3 & + \frac{3}{8}bbxx & - \frac{1}{16}bbbx & + \frac{1}{256}b^4. & = & z^4 \\
+ bx^3 & - \frac{3}{4}bbxx & + \frac{3}{16}bbbx & - \frac{1}{64}b^4. & = & +bz^3 \\
& - apxx & + \frac{1}{2}apbx & - \frac{1}{16}apbb & = & -apzz \\
& & - aaqx & + \frac{1}{4}aaqb & = & -aaqz \\
& & & + aaar & &
\end{array}$$

Harum omnium summa fit æquatio nova secundo termino carens, quæq; proinde juxta regulam Cartesianam construi possit, sumendo loco $\frac{1}{2}p$ *dimidium coefficientis termini tertii per* a *sive Latus rectum divisi, hoc est* $-\frac{3}{16}\frac{bb}{a} - \frac{1}{2}p$; *ac Loco* $\frac{1}{2}q$, *dimidium coefficientis termini quarti per* aa *divisi, sive* $+\frac{1}{16}\frac{bbb}{aa} + \frac{1}{4}\frac{pb}{a} - \frac{1}{2}q$. *Cujus partes signo* $+$ *notatæ sinistrorsum ab Axe, signo* $-$ *notatæ dextrorsum collocandæ sunt, ut habeatur centrum Circuli ad constructionem requisiti, ac cujus intersectiones cum Parabola, dimissis in axem perpendiculis, radices omnes veras* x *designet, affirmativas quidem ad dextram axis, negativas vero ad sinistram. Cum vero* $x - \frac{1}{4}b = z$, *ducendo lineam Axi parallelam, ad dextrum ejus latus & ad distantiam* $\frac{1}{4}b$, *perpendicula illa ad hanc parallelam terminata designabunt omnes radices quæsitas* z, *affirmativas ad dextram, negativas vero ad sinistram. Radium circuli quod attinet, habetur ille addendo partes negativas ac auferendo partes affirmativas termini quinti per* a a *divisi, e quadrato lineæ* A E, *a centro invento* E *ad*

Ver-

Verticem Parabolæ A *ductæ: id quod maxima ex parte efficitur capiendo loco lineæ* A E *lineam* E O, *quæ ad* O *interſectionem Parabolæ ac parallelæ prædictæ terminatur; ejus enim quadratum omnes termini quinti partes ex ablatione termini ſecundi æquationi novæ ingeſtas complectitur (uti facile probabitur:) ac reſtat ſolummodo ut ipſius* E O *quadratum augeatur, ſi in æquatione habeatur* — r, *vel minuatur ſi ſit* + r, *additione vel ſubductione rectanguli* a r, *unde conflatur quadratum Radii Circuli quæſiti.*

Hæc eſt methodus inveſtigandi regulam centralem Dni Bakeri *omnibus cautionibus libera ac ſatis facilis; ac ſola differentia ex eo provenit, quod ego juxta Axem, ille vero juxta Axi parallelam circuli ejuſdem centrum determinat: quodq; ego ſemper radices affirmativas ex Axis dextro latere invenio, quas ille nunc dextro nunc ſiniſtro conſtituit.*

Æquationes cubicas quod attinet, eæ reduci debent ad Biquadraticas, antequam eadem regula generali conſtrui poſſint; id quod fit ducendo æquationem propoſitam in radicem ſuam z, *unde provenit æquatio Biquadratica in qua deficit terminus ultimus ſive* r: *quapropter ſublato ſecundo termino & invento centro* E, *linea* E O *eſt radius Circuli; cum ſcilicet* a r *ſit* = o, & *in nova æquatione totus terminus quintus ex ipſa ablatione termini ſecundi oriatur. Conſtruenda ſit hæc æquatio.*

Exemp. II.

$z^3 - bzz + apz + aaq = 0$: *Quæ ducta in* z *fit*
$z^4 - bz^3 + apzz + aaqz = 0$.
Ad tollendum ſecundum terminum ponatur $x + \frac{1}{4}b = z$, & *fiet*

$$
\begin{array}{l}
x^4 + bx^3 + \frac{3}{8}bbxx + \frac{1}{16}b^3x + \frac{1}{256}b^4 = +z^4 \\
\quad = bx^3 - \frac{3}{4}bbxx - \frac{3}{16}b^3x - \frac{1}{64}b^4 = -bz^3 \\
\qquad\qquad + apxx + \frac{1}{2}abpx + \frac{1}{16}apbb = +apzz \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + aaqx + \frac{1}{4}aaqb = +aaqz
\end{array}
$$

In hac nova Æquatione, tertii termini ſemicoefficiens per a *diviſa*, viz. $= \frac{3bb}{16a} + \frac{1}{2}p$, *loco* $\frac{1}{2}p$ *uſurpanda eſt; ac coeffi-*

 cientis

cientis termini quarti dimidium, divisum per a a *Lateris recti quadratum,* viz. $-\frac{bbb}{16aa}+\frac{pb}{4a}+\frac{1}{2}q$, *vicem ipsius* $\frac{1}{2}q$ *in constructione* Cartesii *subit; unde centrum* E *determinatur. Deinde ducta Axi parallela ad distantiam* $\frac{1}{4}b$ *ad sinistrum ejus latus (ob* $x+\frac{1}{4}b=z$*) cujus intersectio cum Parabola sit* O; *circulus centro* E, *Radio* E O *descriptus Parabolam secet vel tanget in tot punctis quot æquatio veras habet radices: quæ quidem radices seu* z *sunt perpendicula de punctis illis in Axi parallelam demissa; ad dextram quidem Affirmativæ, Negativæ ad sinistram.*

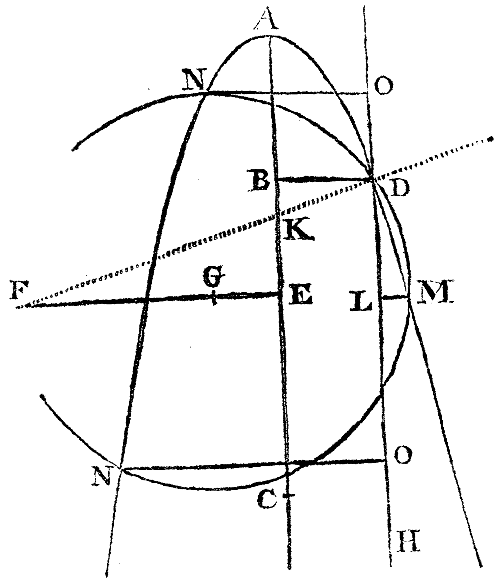
Si in æquatione defuerit terminus tertius vel quartus vel uterq;, in investiganda regula centrali nulla omnino observanda est methodus differentia, sed deficiente quantitate p *vel* q, *deerunt partes illæ linearum* C D *ac* D E *ex quantitate illa aliquo modo deductæ, ac procedendum est cum reliquis coefficientibus termini tertii and quarti in æquatione nova, sicut in præmissis exemplis præscriptum est.*

Hactenus Cl. Bakeri *methodum generalem pertractavimus, qua quidem nulla alia facilior ac paratior expectanda est, assumpta ad constructionem sive Parabola, sive alia quævis linea curva, cum scilicet æquatio ad Biquadraticam ascendit. Etenim dum hæc scribo mihi occurrit regulæ Centralis Effectio Geometrica præter omnem spem expedita, ac harum rerum Curiosis abunde satisfactura.*

Descripta Parabola N A M, *cujus vertex* A, *Axis* A B C *ac latus rectum* a, *reducatur æquatio ad hanc formam* $z^4 . b z^3 . a p z z . a a q z . a^3 r. = 0$ *vel ad hanc* $z^3 . b z z . a p z . a a q = 0$ *si cubica tantum fuerit: dein ad distantiam* $BD=\frac{1}{4}b$ *ducatur linea* D H *Axi parallela, ad sinistram quidem si fuerit* — b, *ad dextram si* + b, *parabolæ occurrens in puncto* D; *de quo dimittatur perpendiculum in axem* B D. *In linea* A B *continuata versus* B *fiat* $BK=\frac{1}{2}a$, *& ducatur linea* D K *utrinq; interminata. Porro sit* $KC=2AB$ *in Axe semper ultra* K *continuato; ac si habeatur quantitas* p *signo* — *affecta, versus easdem partes etiam sumatur* $CE=\frac{1}{2}p$, *vel in contrarias,*

si

si habeatur + p, *ac e puncto* E *erigatur Axi perpendiculum* E F (*vel e puncto* C *si defuerit quantitas* p) *lineæ* D K, *si opus est continuatæ, occurrens in puncto* F ; *quod quidem circuli requisiti centrum est, si defuerit quantitas* q ; *Ast si habeatur* q, *sumenda est in* F E, *si opus est continuata, linea* F G $= \frac{1}{2}$ q, *sinistrorsum quidem si fuerit* + q, *dextrorsum si* — q *collocanda : Et punctum* G *erit centrum circuli ad constructionem propositam idonei ; ejusq; Radius, si defuerit quantitas* r, *hoc est si tantum cubica fuerit, erit linea* G D ; *cujus quadratum in Biquadraticis augendum est, si fuerit* — r, *vel minuendum si* + r *additione vel subductione rectanguli sub* r *&* *latere recto. Descripto sic Circulo, ab intersectionibus ejus cum Parabola demissis in lineam* D H *perpendiculis, quæ ad sinistram sunt, ut* N O, *radices æquationis negativas semper designant, quæ ad dextram ut* M L *affirmativas.*



Aliter ac paulo simplicius Æquationes cubicæ juxta Schooteni *Regulam construuntur, quaq; etiam radices ad Axem referuntur : quoniam vero ipse inventor nec modum inveniendi nec demonstrationem inventi exponit, non abs re erit ejusdem fundamentum hic adjicere, simul atq; Effectionem Geometricam concinniorem reddere, atq; cautionibus quibus implicatur extricare.*

Hæc Regula derivatur ex eo quod omnis æquatio Cubica reduci possit ad Biquadraticam, in qua deficiet terminus secundus : Hoc fit ducendo æquationem propositam in z — b = o, *si fuerit* + b *in*

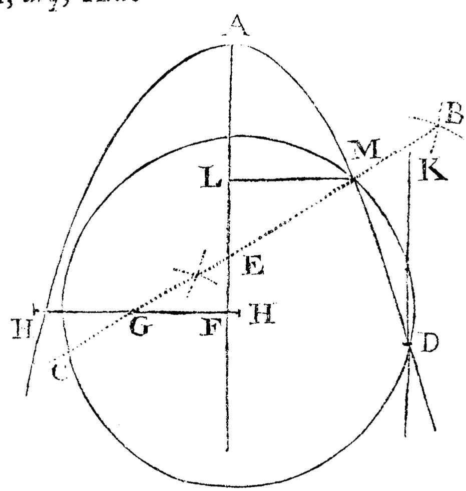
æquatione, vel in $z + b = 0$, *si fuerit* $-b$; *& æquatio nova producta easdem habebit radices cum Cubica, atq; insuper alteram ipsi* $-b$ *æqualem, si fuerit* $-b$ *in æquatione, vel contra.*

Proponatur construenda $z^3 - z^2 b + apz + aaq = 0$.

Hæc ducta in $z + b$ *fit* $\begin{array}{l} z^4 - z^3 b + apz^2 + aaqz \\ \quad + z^3 b - bbzz + abpz + aaqb. \end{array}$

Hic deficit secundus terminus, ac coefficiens tertii $-bb + ap$ *dat* $-\frac{bb}{2a} + \frac{1}{2}p$ *loco* $\frac{1}{2}p$ *vel* C D *in Constructione* Cartesii, *& ex dimidio coefficientis termini quarti fit* $+\frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ *loco* $\frac{1}{2}q$ *vel* D E *usurpanda; adeoq; determinatur centrum circuli quæsiti: atq; ob datam unam ex radicibus æquationis novæ,* viz. $-$ *vel* $+b$, *dabitur etiam punctum in circumferentia, id est Radius ejus. Deniq; descripto circulo, ab intersectionibus ejus cum Parabola demissa in Axem perpendicula Æquationis radices exhibebunt, affirmativas & negativas, eadem lege ac supra.*

Investigatur autem centrum Circuli constructione qerquam facili, cæterisq; omnibus in Cubicis præferenda. Descriptæ Parabolæ A M D *sit vertex* A, *atq; Axis* A F: *ad distantiam ipsi* b *æqualem ducatur Axi parallela* D K, *ad dextram si fuerit* $+b$ *in Æquatione, ad sinistram si* $-b$, *quæ Parabolæ occurrat in puncto* D. *Centris* D *&* A *describantur radiis æqualibus arcus occulti utrinq; sese intersecantes, ac per sectionum puncta ducatur linea interminata* B C, *quæ medio lineæ suppositæ* A D *perpendiculariter insistat,*



& Axi occurrat in puncto E. *Ab* E, *inferne quidem si in æquatione habeatur* $= p$, *vel superne versus* A *si fuerit* $+p$, *ponatur*

tur E F $= \frac{1}{2}$ p; & *ex* F *(vel ex* E *si defuerit* p*) educatur perpendiculum* F G, *lineæ* B C *occurrens in puncto* G; & *in* G F *producta fiat* G H $= \frac{1}{2}$ q, *dextrorsum quidem si in æquatione habeatur* — q, *aliter sinistrorsum, applicanda: ac punctum* H *erit centrum quæsitum,* H D *vero circuli Radius, qui demissis in axem perpendiculis ab intersectionibus suis cum Parabola, ut* L M, *Radices omnes, ut prius, commonstrabit. Quomodo vero constructio hæc ex præmissis consequatur, per se satis edens est, nec opus est ut in eadem demonstranda diutius immorer.*

Ne in his edendis frustraneam navasse operam, & ex aliorum inventis gloriolam captare videar, consulat Lector Cl. Bakeri *librum Anno* 1684 Londini *editum, & quæ de hoc Argumento scripsit* a Schooten *in Commentario suo in Librum III. Geometriæ Cartesianæ. Brevi concesso otio tractatulum alium de numero Radicum in hujusmodi Æquationibus, earumq; limitibus, ex contemplatione Constructionum paæcedentium, aggredi ac in lucem proferre statuo.*